前言:

解数学题和任何一道物理化学等题目，都必须要做到答题素质要好，有一个非常好的答题习惯，一个好的答题习惯，不仅训练和形成自己的解题思路，而且还可以有一个清晰的表达，下面通过前后的答题案例对比来予以说明：什么是比较好的解题习惯。

旧的解题笔录（答卷）

1.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。

解：$\because f(x)=e^{x^2}$

即 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$

由题知

$f[\varphi(x)]=1-x$

即

$1-x=e^{[\varphi(x)]^2}$.

$e^{\ln(1-x)}=e^{[\varphi(x)]^2}$

$\ln(1-x)=[\varphi(x)]^2$.

$\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$

因 $\varphi(x)\geqslant 0$

即 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\ln(1-x)$

$\frac{1}{2}\ln(1-x)\geqslant 0$

$\ln(1-x)\geqslant 0$.

$1-x\geqslant 1$

$\cancel{x\leqslant 0}$.

$x\leqslant 0$.

即 $\varphi(x)$的定义域为 $(-\infty,0]$

打开试卷
先找狗

第一次建议后的答卷

问题：①求函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式
②及其定义域

解

① 由题意可知

$$y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

即 $-y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

即 $e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$ ①

由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

即 $e^{y}=x+\sqrt{x^2+1}$ ②

由 ②-① 得：

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

所以 $f^{-1}(x)=y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

② 接下来求解定义域

由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

所以 定义域为 $(-\infty,+\infty)$

(3) 综上所述 $f^{-1}(x)=y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$

第二次建议后的答卷

问题1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$

且 $\varphi(x)\geq 0$

求 $\varphi(x)$

并写出它的定义域

解：

①由题意可知：

$$f(x)=e^{x^2}$$

即 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$

因 $f[\varphi(x)]=1-x$

即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$

所以 $\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$

②接下来求解定义域

因 $\varphi(x)\geq 0$

即 $\sqrt{\ln(1-x)}\geq 0$

所以 $x\leq 0$

③综上所述，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $(-\infty,0]$

1.首先要把题搞清楚，方法是：把题完整的抄一遍，抄的时候每一个意思一段，首先是假设条件1-1，1-2，......，然后是解答题目2-1，2-2，......。

一定要注意，要把这个养成一个习惯，要先练习n次，直到养成习惯为止。

这里边的潜台词是老师出一道题不容易，他有他的心思和条理，首先要理解老师的心思和条理，而最好的理解方式就是仔细读，首先是要手抄，然后分成段落，每一句话一个段落，以此来培养自己的习惯力，习惯是一种力量。

2.然后就是解题，要分成段落，适当加入“所以”，“下面我们要”，“总之”，等等段落语言，解题条理清晰，让老师看着不累，会变相给你加一些过程分，要是作文题就更是如此。

每一个段落之间要分段，每一行之间要适当的空隙，不要太多也不要太少，总之，看你的解题卷面像一幅画一样，层次分明条理清晰，让老师赏心悦目，也是你本人的一道功夫，是一种同理心的体现。

后面又坚持了几天，然后就中断了，下面是这几天的结果，大家先做一个判断......

启航教育

问题(4): 设 $x_1=25$, $x_{n+1}=\arctan x_n$ $(n=1,2\cdots\cdots)$

(2) (1) 证明数列$\{x_n\}$有极限，并求出极限

(3) (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}$

解 ①由题意可知

$x_1=25>0$

$x_{n+1}=\arctan x_n$ $(n=1,2\cdots n)$.

即 $x_n>0$

因 $\arctan x < x$

即 $\arctan x_n < x_n$.

即根据单调有界准则.

所以$\{x_n\}$有极限.

② 设 $x_n=A$.

即 $A=\arctan A$.

所以 $A=0$

总结得 $\{x_n\}$有极限，且 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=0$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_n^3}$

$\dfrac{1}{3(1+t^2)}$

$\dfrac{\frac{t^2}{1+t^2}}{3\quad 3t^2}$

$\dfrac{\frac{t^2}{1+t^2}}{3t^2}$

$\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3t^2}$

$\dfrac{t-\arctan t}{t^3}$

$\dfrac{x_n-\arctan x_n}{x_n^3}$

$\dfrac{1-\frac{x_{n+1}}{x_n}}{x_n^2}$

启航教育

① 设 $a_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}$，则对 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 证明极限存在.

解:

① 由题意可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}\right).$$

即 ~~$\lim\limits_{n\to\infty}$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}$~~

当n为奇数时，n+1就为偶数.

即上式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^{n+1}}\cdot 2^n\right)=\frac{3}{2}$

~~当n为奇数时~~

当n为偶数时，n+1就为奇数.

即上式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{3}\right)=\frac{1}{6}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的极限不存在.

② 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$

当n为奇数时，上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{1}$

当n为偶数时 上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{3}=\frac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 的极限存在.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在.

设 $x_n = t$,

即原式 $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t-\arctan t}{t^3}$

根据洛必达

即原式 $= \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{3(1+t^2)}$

$= \dfrac{1}{3}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{x_n^3} = \dfrac{1}{3}$

启航教育

问题 ① 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}}$

1^{∞}

解 ① 由题意可知

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\cdot\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}-1\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\cdot\left(\frac{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1}{3}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{3}\cdot\frac{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{3}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cancel{\frac{e^{3x}-1}{x}}\right)}$$

$1+2+3$

即 根据等价无穷小 $e^x-1\sim x$，

所以 原式 $= e^{\frac{e}{3}\times 6} = e^{2e}$.

综上所述 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}} = e^{2e}$.

三点体会:
1.对标准的答题案例样板，能够成为习惯，具体的做法是，对这个答题案例的样板，要完整无误的每天抄一遍，坚持一个星期。
2.在抄的过程当中，要做到原封不动，包括里面所有的细节：比如把假设条件分为层次，解答科目分为层次，每个层次一行，比如1234的标号，比如每一个阶段性的结果和下一段留一个空行，在下一段的开始，做一个连续性的语句（下面我们解下一个问题），最后要做综上所述，把要答题的问题一项一项的重复一下写清楚。
3.这就是习惯力的培养过程，习惯是一种力，要改变旧的，换成新的习惯，需要一个过程，一般来讲，经过这一个礼拜就可以培养一个好的习惯力，重点还是：要坚持一个礼拜。

以上的结论是，经过这一个礼拜的案例分析，我们看到第1天效果最好，第2天解答新问题的时候效果就有所回落，到了最后一天就不坚持了，他比最初的要好一些，还是进步了，可以说达到了60分，但是对比第1天的最好的结果，结果还是不能满意的，可以说达到了80分。但是我们的目标是100分，不是吗？从考研人的数，你的目标至少是90分以上。

推荐的方法是:
抄下面这一页，至少抄三遍，争取能够原封不动，以期培养出答题与卷面的习惯:

问题1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$

且 $\varphi(x)\geqslant 0$

求 $\varphi(x)$

并写出它的定义域

解：

① 由题意可知：

$$f(x)=e^{x^2}$$

即 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$

因 $f[\varphi(x)]=1-x$

即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$

所以 $\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$

② 接下来求解定义域

因 $\varphi(x)\geqslant 0$

即 $\sqrt{\ln(1-x)}\geqslant 0$

所以 $x\leq 0$

③ 综上所述，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $(-\infty,0]$

总结
===

前言：
解数学题和任何一道物理化学等题目，都必须要做到答题素质要好，有一个非常好的答题习惯，一个好的答题习惯，不仅训练和形成自己的解题思路，而且还可以有一个清晰的表达，下面通过前后的答题案例对比来予以说明：什么是比较好的解题习惯。

============================
答题方法小结：
1.首先要把题搞清楚，方法是：把题完整的抄一遍，抄的时候每一个意思一段，首先是假设条件1-1，1-2，……，然后是解答题目2-1，2-2，……。
一定要注意，要把这个养成一个习惯，要先练习n次，直到养成习惯为止。
这里边的潜台词是老师出一道题不容易，他有他的心思和条理，首先要理解老师的心思和条理，而最好的理解方式就是仔细读，首先是要手抄，然后分成段落，每一句话一个段落，以此来培养自己的习惯力，习惯是一种力量。
2.然后就是解题，要分成段落，适当加入“所以”，“下面我们要”，“总之”，等等段落语言，解题条理清晰，让老师看着不累，会变相给你加一些过程分，要是作文题就更是如此。
每一个段落之间要分段，每一行之间要适当的空隙，不要太多也不要太少，总之，看你的解题卷面像一幅画一样，层次分明条理清晰，让老师赏心悦目，也是你本人的一道功夫，是一种同理心的体现。

===========================
三点体会：
通过这一周的结果分析，有如下判断，第1天做的最好，后边有所退步，经过这一个礼拜的案例分析，我们看到第1天效果最好，第2天解答新问题的时候效果就有所回落，到了最后一天就不坚持了，但还是比最初的要好一些，还是进步了，可以说达到了60分，但是对比第1天的最好的结果，结果还是不能满意的，可以说达到了80分。但是我们的目标是100分，不是吗？从考研人的数，你的目标至少是90分以上。解决方案是：

1.对标准的答题案例样板，能够成为习惯，具体的做法是，对这个答题案例的样板，要完整无误的每天抄一遍，坚持一个星期。
2.在抄的过程当中，要做到原封不动，包括里面所有的细节：比如把假设条件分为层次，解答科目分为层次，每个层次一行，比如①②③ 的标号，比如每一个阶段性的结果留一个空行，在下一段的开始做一个连续性的语句（下面我们解下一个问题），最后，要做“综上所述”，把要答题的问题一项一项的重复一下写清楚。
3.这就是习惯力的培养过程，习惯是一种力，这种解题的习惯力不仅适用于高等数学，也适用于任何一门学科，包括文科和理科工科，一旦形成学习力习惯力，终身受益，但是需要努力，足够的努力才可以办到。
要改变旧的、换成新的习惯需要一个过程，一般来讲，需要一个礼拜的持续努力，要原封不动的抄，原封不动很重要，但是也不容易做到。

重点还是：要原封不动坚持一个礼拜。